LIVRO 2

AULA 14

Transformações Lineares

META

Explorar e ilustrar algumas transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, bem como as transformações lineares.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de identificar e utilizar as transformações do plano sobre o plano.

PRÉ-REQUISITOS

Ter compreendido as mudanças de coordenadas, além do conceito de elipse (aulas 9 e 11).

14.1 Introdução

Olá caro aluno! Nesta aula iremos conhecer o conceito de transformação linear e alguns exemplos sobre ela para nos familiarizarmos com este tipo especial de função. Nesses exemplos, além de conhecermos algumas transformações clássicas como a translação, homotetia, rotação e projeção, aprenderemos que essas transformações podem ser representadas de forma matricial. Também observaremos uma aplicação desse conteúdo, em que a imagem de uma transformação linear sobre os vetores de uma circunferência unitária será uma elipse.

Vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 14.1.1. Se de um quilograma de soja são extraídos $0,2$ litros de óleo, de uma produção de x kg de soja seriam extraídos $0,2x$ litros de óleo. Escrevendo na linguagem de funções, teremos

$$O(s) = 0,2s,$$

com $O =$ **quantidade de óleo de soja em litros** e $s =$ **quantidade em kg de soja**, que podemos representar graficamente como na figura a seguir.

A função $O(s)$ é uma função linear As funções lineares descrevem o tipo mais simples de dependência entre variáveis e muitos problemas podem ser representados por tais funções.

Toda função tal que

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & & f(x) = a \end{array}$$

com a um número real constante, é considerada uma FUNÇÃO LINEAR.

Neste exemplo simples, vamos analisar duas características importantes:

1. Para calcular a produção de óleo fornecida por $(s_1 + s_2)$kg de soja, podemos tanto multiplicar $(s_1 + s_2)$ por $0,2$ como calcular as produções de óleo de cada uma das quantidades

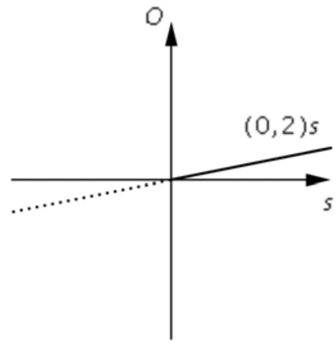


Figura 14.97: $O(s) = 0,2s$, com $s \leq 0$.

s_1 e s_2 e somá-las, isto é,

$O(s_1+s_2) = 0,2\cdot(s_1+s_2) = 0,2\cdot s_1+0,2\cdot s_2 = O(s_1)+O(s_2)$.

2. Se a quantidade de soja for multiplicada por um fator k, a produção de óleo será multiplicada por esse mesmo fator, isto é,

$$O(\lambda s) = 0,2 \cdot (\lambda s) = \lambda(0,2 \cdot s) = \lambda O(s).$$

Estas duas propriedades, que, neste caso, são de fácil observação, servirão para caracterizar o que denominaremos **transformação linear**. Uma transformação é sinônimo de função.

Mas, primeiramente, vamos conhecer a definição de *transformação.*

14.2 Transformações no plano

Definição 14.39. Uma **transformação** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faz corresponder a cada vetor $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um vetor $T(\vec{v}) = T(x, y) \in \mathbb{R}^2$, chamado a imagem (ou o transformado) de $\vec{v}$ por T.

As coordenadas de $T(\vec{v})$ são números que dependem das coordenadas $x,\ y$ de $\vec{v}$, portanto,

$$T(\vec{v}) = T(x,y) = (f(x,y), g(x,y)),$$

isto é, dar uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é o mesmo que dar as funções $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, chamadas **funções-coordenadas** de T.

Exemplo 14.2.1. A transformação

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{v} & \mapsto & T(\vec{v}) = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}. \end{array}$$

Para todo vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, a transformação leva no vetor nulo $\vec{0}$.

) é uma função entre dois vetores(espaços vetoriais) que preserva as operações de adição vetorial e multiplicação escalar

Exemplo 14.2.2 (Transformação Identidade)**.** A transformação

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{Id}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{v} & \mapsto & \mathbf{Id}(\vec{v}) = \vec{v} \end{array}$$

A cada vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ a transformação leva no próprio vetor $\mathbf{Id}(\vec{v}) = \vec{v}$.

Exemplo 14.2.3. Dado o vetor $\vec{w} = (a,b)$, a translação $T_{\vec{w}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T_{\vec{w}}(x,y) = (x+a, y+b)$$

para todo vetor $\vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, é uma transformação de $\mathbb{R}^2$. Em particular, se $\vec{w} = (1,2)$, a transformação será dada por $T_{\vec{w}}(x,y) = (x+1, y+2)$. Note que as funções coordenadas são dadas por $f(x,y) = x+a$ e $g(x,y) = y+b$. Atente para a figura após o exemplo a seguir.

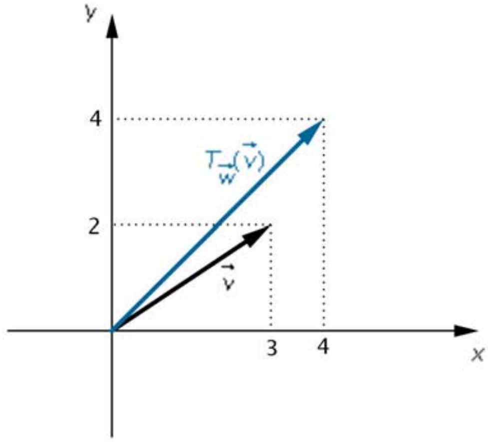


Figura 14.98: $T_{\vec{w}}(\vec{v}) = (x+1, y+2)$.

Exemplo 14.2.4. As funções-coordenadas de uma transformação podem ser tomadas arbitrariamente. Por exemplo, se tomarmos $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $f(x,y) = xy^2$ e $g(x,y) = \cos(xy)$, então teremos a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y) = (xy^2, \cos(xy))$.

Nossa intensão é estudar exemplos de transformações com funções-coordenadas mas simples que as do exemplo anterior.

Exemplo 14.2.5 (Expansão (ou Contração) Uniforme)**.** As transformações do tipo:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \vec{v} & \mapsto & T(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \end{array} \qquad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Por exemplo,

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2. \\ & (x,y) & \mapsto & T(x,y) = 2(x,y) \end{array}$$

Esta transformação leva cada vetor do plano num vetor de mesma direção e sentido de $\vec{v}$, mas de módulo maior. Caso tivéssemos

$\lambda = 1/3$ em vez de $\lambda = 2$, o módulo do vetor seria menor que o de $\vec{v}$, porém com mesmos sentido e direção. Na verdade, neste caso, quando temos as seguintes possibilidades:

1. $\lambda > 1$ é uma **expansão**(isto é, $T(\vec{v})$ tem módulo maior que $\vec{v}$);
2. $\lambda = 1$ é **transformação de identidade**(ou seja, $T = \mathbf{Id}$);
3. $\lambda < 1$ é uma **contração**(isto é, $T(\vec{v})$ tem módulo menor que $\vec{v}$).

Exemplo 14.2.6 (Rotação em torno da origem.)**.** Fixando um ângulo θ, a rotação $R = R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faz corresponder a cada $\vec{v} = (x, y)$ o vetor $R(\vec{v}) = (x', y')$, de mesmo comprimento que $\vec{v}$, tal que o ângulo de $\vec{v}$ para $R(\vec{v})$ é θ (no sentido anti-horário). Note que na figura (14.99), o vetor $\vec{v}$ tem coordenadas

$$x = r\cos\alpha \quad \text{e} \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

com $r = |\vec{v}|$, as coordenadas do vetor $R(\vec{v})$ sejam

$$x' = r\cos(\alpha + \theta) \quad \text{e} \quad y' = r\,\mathrm{sen}\,(\alpha + \theta).$$

Usando as relações já conhecidas

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha\cos\theta - \mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{e}$$

$$\mathrm{sen}\,(\alpha + \theta) = \mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta + \cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

e substituindo-as em $R(\vec{v})$, obtemos

$$\begin{cases} x' = r\,(\cos\alpha\cos\theta - \mathrm{sen}\,\alpha\ \mathrm{sen}\,\theta) \\ y' = r\,(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\theta + \cos\alpha\ \mathrm{sen}\,\theta) \end{cases}$$

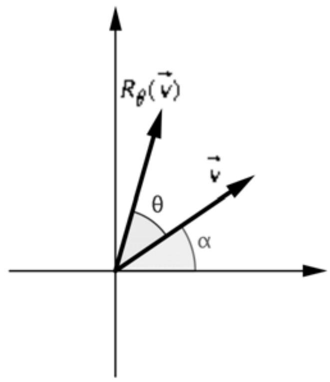


Figura 14.99: $R(\vec{v}) = R_\theta(\vec{v})$ é o vetor $\vec{v}$ rotacionado num ângulo θ.

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \underbrace{(r\cos\alpha)}_{x} \cos\theta - \underbrace{(r\,\mathrm{sen}\,\alpha)}_{y} \,\mathrm{sen}\,\theta \\ y' = \underbrace{(r\cos\alpha)}_{x} \,\mathrm{sen}\,\theta + \underbrace{(r\,\mathrm{sen}\,\alpha)}_{y} \cos\theta \end{cases}$$

E assim, $R_\theta(\vec{v}) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$. Podemos ainda colocar numa forma matricial,

$$R_\theta(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x\mathrm{sen}\ \theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

No caso particular em que $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\theta = 0$ e $\mathrm{sen}\,\theta = 1$. Então, se $\vec{v} = (x, y)$,

$$R_\theta(\vec{v}) = R_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \Rightarrow R_\theta(\vec{v}) = (-y, x).$$

Acreditamos que você tenha percebido, no Exemplo (14.2.6), que as coordenadas do vetor $R_\theta(\vec{v})$ são dadas em termos das coordenadas de $\vec{v}$. E, por isso, esteja questionando a possibilidade de

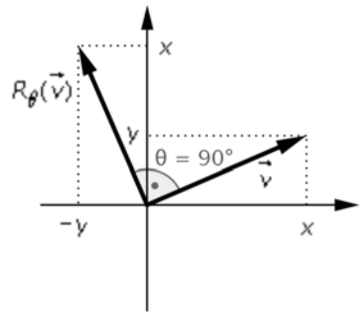


Figura 14.100: Com $\vec{v} = (x, y)$ e $\theta = \pi/2 \Rightarrow R_\theta(x, y) = (-y, x)$.

fazer o contrário, ou seja, escrever as coordenadas do vetor $\vec{v}$ em termos das coordenadas de $R_\theta(\vec{v})$.

A resposta para o seu questionamento é sim! Pois basta aplicarmos uma rotação (neste caso, fazemos uma rotação de $-\theta$ e, desta forma, $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, pelo fato de o cosseno ser uma **função par** e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}(\theta)$, pois o seno é uma **função ímpar**) de $-\theta$ em $R_\theta(\vec{v})$ e retornamos ao vetor $\vec{v}$, da seguinte forma:

Toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, é considerada **par**, e se $f(-x) = -f(x)$, a função é considerada **ímpar**.

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta + y' \operatorname{sen}\theta \\ y = -x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{cases}$$

ATENÇÃO: *D*evemos notar a analogia e, ao mesmo tempo, a diferença entre as equações anteriores e aquelas estudadas na **Aula 11** (Mudança de Coordenadas no Plano). Neste caso, estamos mantendo fixos os eixos e girando os vetores, enquanto nas equações daquela aula os vetores ficavam fixos e os eixos se moviam. Na Aula 11, as equações exprimiam as novas coordenadas de um mesmo vetor em função da antigas; nesta aula, elas exprimem as coordenadas do vetor $R_\theta(\vec{v})$ em termos das coordenadas de $\vec{v}$.

Exemplo 14.2.7. (Projeção ortogonal sobre uma reta que contém a origem.) Seja r a reta em $\mathbb{R}^2$ dada pela equação $y = ax$. A projeção ortogonal sobre r é a transformação $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que faz corresponder a todo $\vec{v} = (x, y)$ o vetor $P(\vec{v}) = (x', y')$, cuja extremidade é o pé da perpendicular baixada de $\vec{v}$ sobre a reta r. Então temos $y' = ax'$. Para obtermos as coordenadas de $P(\vec{v})$ em função das coordenadas de $\vec{v}$, iremos observar o Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo OAB na figura a seguir. Note que

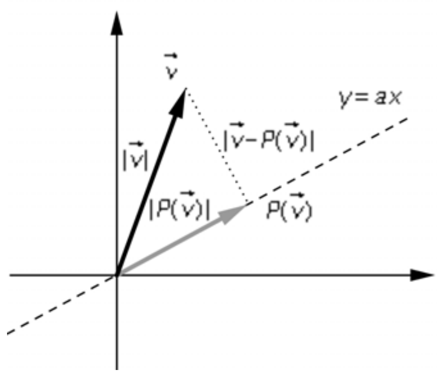


Figura 14.101: $|\vec{v}|^2 = |P(\vec{v})|^2 + |\vec{v} - P(\vec{v})|^2$

$$\begin{array}{lll} \vec{v} = (x, y) & \Rightarrow & |\vec{v}|^2 = x^2 + y^2 \\ P(\vec{v}) = (x', ax') & \Rightarrow & |P(\vec{v})|^2 = (x')^2 + (ax')^2 \\ \vec{v} - P(\vec{v}) = (x - x', y - ax') & \Rightarrow & |\vec{v} - P(\vec{v})|^2 = (x - x')^2 + (y - ax')^2 \end{array}$$

O que resulta em

$$x^2 + y^2 = (x')^2 + (ax')^2 + (x - x')^2 + (y - ax')^2$$

$$\Downarrow$$

$$(1 + a^2)x' = x + ay$$

E assim podemos reescrever as funções-coordenadas de $P(\vec{v}) = (x', y')$ como

$$x' = \frac{1}{1+a^2}x + \frac{a}{1+a^2}y$$
$$y' = \frac{a}{1+a^2}x + \frac{a^2}{1+a^2}y$$

Observação 23. Note que se $\vec{w} = (x', ax')$, existem infinitos vetores $\vec{v} = (x, y)$ tal que $P(\vec{v}) = \vec{w}$. (A saber, todos os vetores que têm extremidades em A e em qualquer outro ponto perpendicular à reta r e passando por B. Veja na figura (14.102).) Com isso, dizemos

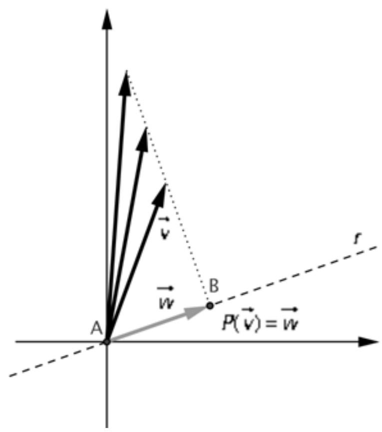


Figura 14.102: $\vec{w} = B - A$

que R é uma transformação **invertível**, mas P não é.

14.3 Transformações lineares

Definição 14.40. (Transformações Linares) Uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é chamada LINEAR quando há números a, b, c e d tal que

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy) \tag{14.1}$$

para qualquer vetor $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

As transformações de identidade (**Id** do exemplo 14.2.2) e nula (no exemplo 14.2.1) são linares, enquanto a projeção (no exemplo 14.2.7) e a translação (exemplo 14.2.3) não são lineares.

Perceba que em toda transformação linear na forma (14.1) tem-se $T(0,0) = (0,0)$. O que não ocorre com a translação (exemplo 14.2.3), pois $T_{\vec{w}}(x,y) = (0+a, 0+b) \neq (0,0)$.

Definição 14.41. A tabela

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

chama-se a **matriz** da transformação linear T. Os vetores-coluna (a,c) e (b,d) dessa matriz são os transformados por T dos vetores $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (0,1)$ da base canônica, isto é, $T(\vec{i}) = (a,c)$ e $T(\vec{j}) = (b,d)$.

A definição dada nesta aula de transformação linear é equivalente à afirmação seguinte.

Afirmação - Se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear, então, dados arbitrariamente $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \quad \text{e} \quad T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u}). \tag{14.2}$$

De fato, seja a matriz de T dada por $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, temos então que $\vec{u}+\vec{v} = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ e $\alpha\vec{u} =$*

$(\alpha x_1, \alpha y_1)$, *e assim*

$$\begin{aligned} T(\vec{u}+\vec{v}) = \quad & (a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2), c(x_1+x_2)+d(y_1+y_2)) \\ & (ax_1+ax_2+by_1+by_2, cx_1+cx_2+dy_1+dy_2) \\ & (ax_1+by_1, cx_1+dy_1)+(ax_2+by_2, cx_2+dy_2) \\ & T(\vec{u})+T(\vec{v}) \end{aligned}.$$

$$\begin{aligned} T(\alpha\vec{u}) = \quad & (a(\alpha x_1)+b(\alpha y_1), c(\alpha x_1)+d(\alpha y_1)) \\ & \alpha(ax_1+by_1, cx_1+dy_1) \\ & \alpha T(\vec{u}) \end{aligned}$$

E ainda, reciprocamente, se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação que satisfaz às condições (14.2), então T é linear. *De fato, sejam* $T(\vec{i}) = (a, c)$ *e* $T(\vec{j}) = (b, d)$ *, então, dado um vetor* $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$*, temos que*

$$\begin{aligned} T(\vec{v}) = \quad & T(x\vec{i}+y\vec{j}) = T(x\vec{i})+T(y\vec{j}) = xT(\vec{i})+yT(\vec{j}) \\ & x(a,c)+y(b,d) = (ax,cy)+(bx,dy) \\ & (ax+by, cx+dy) \end{aligned}.$$

Isso conclui a demonstração da afirmação e sua recíproca.

Note que, apesar de termos visto até agora exemplos de transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, é possível encontrarmos exemplos de transformações lineares de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. É o caso do Exemplo (14.1.1), que é uma função do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$ (chamada de **função linear**), com a um número real não nulo e que obedece às duas propriedades dadas nas equações (14.2).

Definição 14.42. Dizemos que a matriz M tem **posto nulo** quando M for a matriz nula, isto é,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O **posto** de uma matriz M é igual a 1 quando M não é nula e seus vetores-coluna são colineares, ou seja, um deles é múltiplo do outro. E quando os vetores-coluna de M são não-colineares, ou seja, quando $ad - bc \neq 0$, dizemos que M tem posto 2.

Em outras palavras:

M **com posto 1** $\rightarrow$ isto quer dizer que $ad - bc = 0$ (e M não é a matriz nula);

M **com posto 2** $\rightarrow$ isto significa que $ab - bc \neq 0$.

Exemplo 14.3.1. A matriz $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ tem posto 1 enquanto a matriz $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ tem posto 2.

Afirmação 1 - Se a matriz M da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem posto zero, então T é a transformação nula, ou seja, transforma todo vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ no vetor nulo.

Exercício 14.3.1. Mostre que a afirmação anterior é verdadeira usando a definição (14.41).

Afirmação 2 - Se a matriz M tem posto 1, então os vetores transformados $T(\vec{v})$ de $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ formam uma reta.

Exercício 14.3.2. Considere que os vetores-coluna de uma matriz de posto 1 são **múltiplos** um do outro para mostrar que a afirmação anterior é verdadeira.

Afirmação 3 - Se a matriz M tem posto 2, então as imagens $T(\vec{v})$ dos vetores $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ preenchem todo o plano $\mathbb{R}^2$. *De fato, dizer que M tem posto 2 é afirmar que $ad - bc \neq 0$. E, desse modo, para*

Ou seja, se a matriz for dada por $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então os vetores-colunas são (a, c) e (b, d), assim, para que (a, c) e (b, d) sejam **múltiplos** existe um número real α, tal que $(a, c) = \alpha(b, d) \Rightarrow a = \alpha b$ e $c = \alpha d$.

qualquer $\vec{w} = (m, n)$, *o sistema de equações*

$$\begin{cases} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{cases}$$

tem uma, e somente uma solução $\vec{v} = (x, y)$, *pois essas duas equações representam retas que têm um único ponto de interseção.*

Vamos ao enunciado de um teorema relevante para que possamos consequentemente afirmar que uma transformação linear transforma circunferências em elipses.

Teorema 14.2. *Para toda transformação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *existem vetores unitários ortogonais* $\vec{u}, \vec{v}$ *que são transformados por* T *em vetores ortogonais* $T(\vec{u}), T(\vec{v})$.

Demonstração. Sejam $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$ os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$. Tomamos $A = |T(\vec{i})|^2$, $B = \langle T(\vec{i}), T(\vec{j})\rangle$ e $C = |T(\vec{j})|^2$, e vamos introduzir a forma quadrática $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

e considerando o fato de T ser linear, para todo $\vec{w} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} \in \mathbb{R}^2$ temos que $\varphi(x, y) = |T(\vec{w})|^2$. Seja $\vec{u} = (a, b)$ um autovetor unitário da forma quadrática φ. Isso significa que para um certo $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ (autovalor de φ), tem-se

Lembre-se do que fizemos na **Aula 12**.

$$\begin{cases} Aa + Bb &= \lambda_1 a \\ Ba + Cb &= \lambda_1 b \end{cases}$$

Seja $\vec{v} = (-b, a)$, obtido de $\vec{u}$ por uma rotação de 90^o, assim, $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle = 0$, pois

$$|T(\vec{u} + \vec{v})|^2 = |T(\vec{u})|^2 + |T(\vec{u})|^2 + 2\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle \qquad (14.3)$$

$$\Downarrow$$

$$2\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle = |T(\vec{u}+\vec{v})|^2 - |T(\vec{u})|^2 - |T(\vec{u})|^2$$

Como $\vec{u}+\vec{v} = (a-b, b+a)$, temos que

$$\begin{aligned} |T(\vec{u}+\vec{v})|^2 &= \varphi(a-b, b+a) \\ &= A(a-b)^2 + 2B(a-b)(b+a) + C(b+a)^2 \\ |T(\vec{u})|^2 &= Aa^2 + 2b(ab) + Cb^2 \\ |T(\vec{v})|^2 &= A(-b)^2 + 2B(-ba) + Ca^2 \end{aligned}$$

E agora, substituindo na equação (14.3),

$$\begin{aligned} \langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle &= Cab + Ba^2 - (Aab + Bb^2) \\ &= a(Cb + Ba) - b(Aa + Bb) \\ &= a \cdot \lambda_1 b - b \cdot \lambda_1 a = 0 \end{aligned}$$

O que completa a demonstração do teorema. □

Teorema 14.3. *Toda transformação linear invertível* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *transforma a circunferência unitária* $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ *numa elipse.*

Demonstração. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores unitários, tal que $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$ e $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle = 0$. Como T é invertível, tem-se que $T(\vec{u}) \neq \vec{0}$ e $T(\vec{v}) \neq \vec{0}$. Todo vetor unitário $\vec{w}$ se escreve como $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$, em que $x^2 + y^2 = 1$. Sua imagem por T é $T(\vec{w}) = xT(\vec{u}) + yT(\vec{v})$. Se adotarmos um sistema de coordenadas com origem $O = (0, 0)$, cujos vetores unitários dos eixos são $\dfrac{T(\vec{u})}{|T(\vec{u})|}$ e $\dfrac{T(\vec{v})}{|T(\vec{v})|}$, as coordenada de $T(\vec{w})$ nesse sistema serão $s = x \cdot |T(\vec{u})|$ e $t = y \cdot |T(\vec{v})|$. Temos então que

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{s^2}{|T(\vec{u})|^2} + \frac{t^2}{|T(\vec{v})|^2} = 1$$

E assim, os vetores do plano $\vec{w}$ pertencentes à circunferência S^1 são levados por T nos vetores do plano $T(\vec{w})$ pertencentes à elipse no novo sistema de coordenadas (veja a figura (14.103)), com equação

$$\frac{s^2}{|T(\vec{u})|^2} + \frac{t^2}{|T(\vec{v})|^2} = 1.$$

□

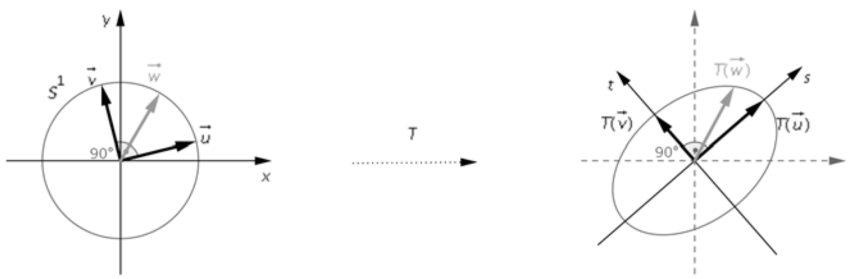


Figura 14.103: $\vec{w} \in S^1$ e $T(\vec{w})$ estão na elipse.

Observação 24. Segue do teorema (14.3) que uma transformação linear invertível $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva qualquer circunferência γ a uma elipse.

De fato, se γ tiver centro na origem e raio r, sua imagem pela transformação T pode ser obtida mediante uma sequência de três transformações:

1^o) homotetia (veja a atividade (5)) de razão $1/r$, que leva γ em S^1 (ou seja, transforma uma circunferência de raio qualquer em uma circunferência de raio 1);

2^o) T, que leva S^1 a uma elipse;

3^o) uma homotetia de razão r, que transforma essa elipse em outra com eixos r vezes os anteriores.

E se γ é uma circunferência de raio r e centro $\vec{w}$, usamos a igualdade

$$T(\vec{v}) = T(\vec{v} - \vec{w}) + T(\vec{w})$$

para perceber que a imagem de γ pela transformação T pode ser obtida pela translação da elipse do caso anterior pelo vetor $T(\vec{w})$.

Exemplo 14.3.2. A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$. Vamos responder às perguntas que vão surgir, pois esta sequência serve de sugestão para a atividade (6).

[A matriz da transformação é invertível ?]

É invertível pois a matriz da transformação constituída pelos vetores-coluna $(1, 2)$ e $(2, 1)$ é linearmente independente (ou seja, um não é múltiplo do outro). Além disso, a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det M = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 \neq 0.$$

Deste modo, pelo teorema (14.3), T transforma a circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$ na elipse $E = \{T(\vec{v}); |\vec{v}| = 1\}$.

[Qual será o eixo maior da elipse E ?]

O eixo maior de E é o segmento de reta que liga os seus dois pontos $T(\vec{v}_1)$ e $-T(\vec{v}_1)$, mais afastados da origem. Para encontrar $\vec{v}_1$, vamos considerar a forma quadrática

$$\varphi(x, y) = |T(x, y)|^2 = (x + 2y)^2 + (2x + y)^2 = 5x^2 + 8xy + 5y^2$$

cuja matriz é $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. E para determinar os autovalores, devemos encontrar as raízes de $\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$, que são $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = 1$, cujos autovetores associados ao maior autovalor é a solução do sistema

$$\begin{cases} 5x + 4y = & 9 \cdot x \\ 4x + 5y = & 9 \cdot y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 4y = & 0 \\ 4x - 4y = & 0 \end{cases}$$

E assim, o autovetor é da forma $\vec{v}_1 = (x, x)$, tomando (aproximadamente) $x = 0.71 \Rightarrow \vec{v}_1 = (0.71, 0.71)$. A imagem será

$$T(\vec{v}_1) = T(0.71, 0.71) = (0.71 + 2 \cdot (0.71), 2 \cdot (0.71) + 0.71) = (2.13, 2.13)$$

$$\Downarrow$$

$$T(\vec{v}_1) = (2.13, 2.13),$$

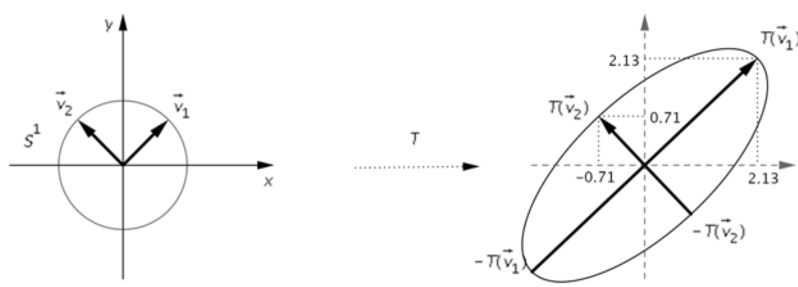
o que nos permite verificar automaticamente que $T(-\vec{v}_1) = (-1) \cdot (2.13, 2.13)$. Portanto, a circunferência unitária (S^1) é transformada por T na elipse E, cujo eixo maior é o segmento que liga

$$T(\vec{v}_1) = (2.13, 2.13) \quad \text{e} \quad T(-\vec{v}_1) = (-2.13, -2.13).$$

Seguindo os mesmos passos para encontrar o maior eixo, podemos encontrar o eixo menor, que é o segmento que liga

$$T(\vec{v}_2) = (0.71, -0.71) \quad \text{e} \quad T(-\vec{v}_2) = (-0.71, 0.71)$$

com $\vec{v}_2$, o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$.



$$\begin{matrix} \vec{v}_1 = (0.71, 0.71) \text{ e} \\ \vec{v}_2 = (-0.71, 0.71) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} T(\vec{v}_1) = (2.13, 2.13) \text{ e} \\ T(\vec{v}_2) = (0.71, -0.71) \end{matrix}$$

14.4 Resumo

Nesta aula, conhecemos a definição de transformação no plano e também de um tipo de transformção linear, além de algumas transformações clássicas como a translação, homotetia, rotação e projeção. Aprendemos que toda transformação pode ser representada de forma matricial. Percebemos que se a matriz da transformação linear for invertível, então a transformação também o será. E, por fim, aplicamos uma transformação linear sobre os vetores de uma circunferência unitária cuja imagem será uma elipse.

14.5 Atividades

1. Determine qual das transformações $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a seguir é linear.

   (a) $T(x, y) = (-y, x + 1)$;

   (b) $T(x, y) = (x - y, 2x + 2y)$;

   (c) $T(x, y) = (|x - y|, |x + y|)$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função. Mostre que:

   (a) se T é uma transformação linear, então $T(\vec{0}) = \vec{0}$;

   (b) se $T(\vec{0}) \neq \vec{0}$, então T não é uma transformação linear.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (4x + 6y, 6x + 9y)$. Mostre que todos os pontos da reta $2x + 3y = 1$ são transformações por T no mesmo ponto de $\mathbb{R}^2$. Qual é esse ponto?

4. Seja $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação em torno da origem. Use as equações que dão as coordenadas de $R(\vec{v})$ para mostrar que $\langle R(\vec{u}), R(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ e $|R(\vec{v})| = |\vec{v}|$ para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

5. [HOMOTETIA] Dado um número $\beta \neq 0$, a transformação linear $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $H(x, y) = (\beta x, \beta y)$ (ou na notação vetorial, $H(\vec{v}) = \beta\vec{v}$) , tem matriz $\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ que tem posto 2, ou seja, é invertível. Esta transformação é chamada de **homotetia** de centro $O = (0, 0)$ e razão β. Mostre que:

   (a) $|H(\vec{u}) - H(\vec{v})| = |\beta||\vec{u} - \vec{v}|$;

   (b) H transforma a circunferência de centro $\vec{v}$ e raio r na circunferência de centro $H(\vec{v})$ e raio $|\beta| \cdot r$.

6. Determine os eixos da elipse que é a imagem da circunferência unitária por cada uma das transformações lineares a seguir:

   (a) $T(x, y) = (x - y, 2x + 2y)$;

   (b) $T(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que a matriz da transformação é dada por $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ache os vetores $\vec{u}, \vec{v}$, tal que

   (a) $T(\vec{u}) = \vec{u}$;

   (b) $T(\vec{v}) = -\vec{v}$.

8. No plano, uma rotação anti-horária de 45^o é seguida por uma dilatação de $\sqrt{2}$. Ache a aplicação A que representa esta transformação do plano.

9. Sabemos que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, tem posto 1 quando a, b, c, d não são todos iguais a zero e existe algum $k \in \mathbb{R}$, tal que $b = ka$ e $d = kc$, ou seja, sua matriz não é nula e tem a forma $\begin{pmatrix} a & ka \\ c & kc \end{pmatrix}$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear de posto 1.

   (a) Prove que existe algum $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $T(\vec{v}) = \vec{0}$.

   (b) Prove que se o vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ é linearmente independente de $\vec{v}$ do item anterior (ou seja, $\vec{u} \neq \alpha \cdot \vec{v}$, qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$ não nulo), então $T(\vec{u}) \neq \vec{0}$.

   (c) Prove que se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem posto 1, os vetores $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, tal que $T(\vec{v}) = \vec{0}$, formam uma reta contendo $\vec{0}$.

14.6 Comentário das atividades

Se você entendeu o conceito de transformações lineares no plano (da definição (14.1)), conseguirá resolver as atividades 1, 2, 3 e 7 sem maiores problemas. Caso tenha resolvido as atividades 4 e 8, então entendeu o exemplo *rotação em torno da origem*. Se você entendeu o exemplo da *expansão ou contração uniforme*, conseguiu responder à atividade 5, e se concluiu a questão 9, então entendeu a noção de posto de uma transformação. E quanto à atividade 6? Se obteve êxito na resolução dessa atividade, entendeu que uma transformação linear leva uma circunferência numa elipse.

Se ainda tiver dificuldades, volte e reveja com cuidado os conceitos apresentados na aula. E não se esqueça dos tutores, pois eles poderão ajudá-lo a eliminar as dúvidas. Além disso, é importante e enriquecedor o contato com os colegas para discutir as questões propostas nesta aula.

14.7 Referências

BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear* . São Paulo: Harbra, 1980.
LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro, IMPA, 2005.
STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books, 1987.