2
LIVRO

15
AULA

Mudança de Coordenadas no Espaço

META

Introduzir as mudanças de coordenadas no espaço.

OBJETIVOS

Efetuar mudança de coordenadas no plano, alterando ou não a origem do sistema. Reconhecer matrizes de passagem (matrizes ortogonais) de um sistema de coordenadas para outro.

PRÉ-REQUISITOS

Dominar o conteúdo abordado na Aula 11 (mudança de coordenadas no plano).

15.1 Introdução

Olá, em continuidade ao que estudamos na **Aula 11** (Mudança de Coordenadas no Plano), iremos expandir nossas fronteiras conhecendo as mudanças de coordenadas no espaço. Surgirá em nossos estudos um tipo de matriz chamada de matriz de passagem, que possibilita a mudança de um dado sistema de coordenadas para um novo sistema. Essas matrizes de passagem têm uma importante propridade, pois suas inversas multiplicativas são iguais às transpostas, o que facilita muito o cálculo das inversas e consequentemente a maneira de escrevermos as coordenadas de um sistema para o outro e vice-versa. Em muitas situações, uma simples mudança de coordenadas pode ajudar a melhorar a visão de uma equação ou de um problema.

15.2 Mudança de sistema de coordenadas no espaço

Em algumas situações, é conveniente mudarmos de um sistema de coordenadas $OXYZ$ para um novo sistema $O'X'Y'Z'$.

Seja P um ponto no sistema $OXYZ$, com coordenadas x, y e z. Como obter as coordenadas x', y' e z' no sistema $O'X'Y'Z'$? Para respondermos a essa pergunta, consideremos os vetores unitários $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dos eixos OX (eixo$-x$), OY (eixo$-y$) e OZ (eixo$-z$), juntamente com os vetores unitário $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ dos eixos $O'X'$, $O'Y'$ e $O'Z'$.

Sabemos que todo vetor de $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, e assim, os vetores $\vec{u}_1 = (a_1, b_1, c_1), \vec{u}_2 =$

$(a_2, b_2, c_2), \vec{u}_3 = (a_3, b_3, c_3)$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}\\ \vec{u}_2 &= a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}\\ \vec{u}_3 &= a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k}\end{aligned} \tag{15.1}$$

Devemo-nos lembrar de que $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ são perpendiculares dois a dois, o que resulta em

$$\langle \vec{u}_n, \vec{i}\rangle = a_n, \quad \langle \vec{u}_n, \vec{j}\rangle = b_n, \quad \langle \vec{u}_n, \vec{k}\rangle = c_n, \quad \text{com } n = 1, 2, 3. \tag{15.2}$$

Das equações $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta$ para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e (15.2) segue que

$$\begin{aligned}a_n &= \cos\alpha_n\\ b_n &= \cos\beta_n \qquad \text{com } n = 1, 2, 3 \text{ e}\\ c_n &= \cos\gamma_n\end{aligned}$$

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ são os ângulos que $\vec{u}_n$ forma com os eixos OX, OY e OZ.

Observação 25. Cada um dos $\vec{u}_n$ são unitários, ou seja,

$$|\vec{u}_n|^2 = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2\alpha_n + \cos^2\beta_n + \cos^2\gamma_n = 1.$$

A recíproca também vale, ou seja, podemos escrever $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ como combinação linear dos vetores unitários $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. Por exemplo,

$$\vec{i} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$$

, e lembrando que os vetores $\vec{u}_n$ são perpendiculares dois a dois, obtemos

$$x = \langle \vec{i}, \vec{u}_1\rangle = a_1, \;\; y = \langle \vec{i}, \vec{u}_2\rangle = a_2, \;\; z = \langle \vec{i}, \vec{u}_3\rangle = a_3,$$

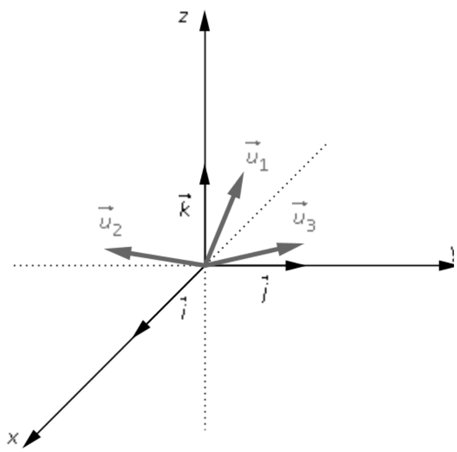

Figura 15.104: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ são ortogonais entre si.

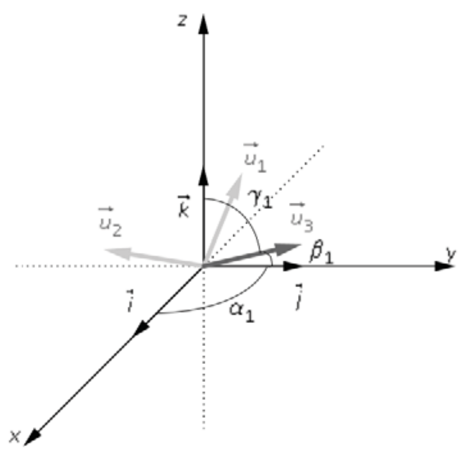

Figura 15.105: $a_1 = \cos\alpha_1$, $b_1 = \cos\beta_1$ e $c_1 = \cos\gamma_1$.

ou seja, $\vec{i} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3$, e que nos implica a obtermos $\vec{j}$ e $\vec{k}$ analogamente,

$$\begin{aligned}\vec{i} &= a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + a_3\vec{u}_3\\ \vec{j} &= b_1\vec{u}_1 + b_2\vec{u}_2 + b_3\vec{u}_3\\ \vec{k} &= c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3\vec{k}\end{aligned} \tag{15.3}$$

Observe que a matriz dos coeficientes de (15.3) é a transposta da matriz dos coeficientes de (15.1).

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad {}^tM = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$$

Portanto, dado um ponto P no sistema $OXYZ$ com coordenadas (x, y, z), equivale a afirmar que $\overrightarrow{OP} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ e analogamente de $\overrightarrow{O'P} = x'\cdot\vec{u}_1 + y'\cdot\vec{u}_2 + z'\cdot\vec{u}_3$. Ou seja, (x', y', z') são as coordenadas do ponto P no sistema de $O'X'Y'Z'$.

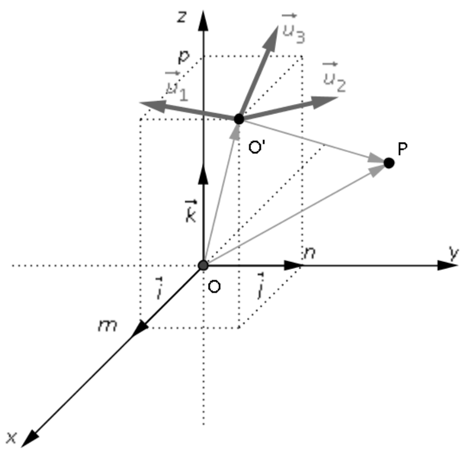

Figura 15.106: $O' = (m, n, p)$ e $\vec{O'P} = \vec{OP} - \vec{OO'}$.

15.3 Transladando a origem do sistema

Sejam (m, n, p) coordenadas da nova origem O' no sistema $OXYZ$, isto é,

$$\overrightarrow{OO'} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}.$$

Note que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, o que implica em

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}. \tag{15.1}$$

Em coordenadas, fica

$$x' \cdot \vec{u}_1 + y' \cdot \vec{u}_2 + z' \cdot \vec{u}_3 = (x - m)\vec{i} + (y - n)\vec{j} + (p - z)\vec{k}.$$

Percebemos que o produto interno com $\vec{u}_1$ de ambos os membros da igualdade anterior nos fornece

$$\langle \vec{i}, \vec{u}_1 \rangle = a_1, \quad \langle \vec{j}, \vec{u}_1 \rangle = b_1, \quad \langle \vec{k}, \vec{u}_1 \rangle = c_1$$

$$\Downarrow$$

$$x' = (x - m)\langle \vec{i}, \vec{u}_1 \rangle + (y - n)\langle \vec{j}, \vec{u}_1 \rangle + (p - z)\langle \vec{j}, \vec{u}_1 \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$x' = (x-m)a_1 + (y-n)b_1 + (z-p)c_1.$$

E fazendo o mesmo produto com $\vec{u}_2$ e $\vec{u}_3$, obtemos

$$\begin{aligned} x' &= (x-m)a_1 + (y-n)b_1 + (z-p)c_1 \\ y' &= (x-m)a_2 + (y-n)b_2 + (z-p)c_2 \\ z' &= (x-m)a_3 + (y-n)b_3 + (z-p)c_3 \end{aligned} \tag{15.2}$$

E como serão as expressões para as coordenadas x, y e z em função de x', y' e z' ? Para respondermos a mais esta pergunta, voltemos à igualdade (15.1),

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}.$$

Em coordenadas,

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 + z'\vec{u}_3. + m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k},$$

tomando o produto interno de ambos os membros por $\vec{i}$, resulta em

$$\langle \vec{i}, x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \rangle = \langle \vec{i}, x'\vec{u}_1 + y'\vec{u}_2 + z'\vec{u}_3. + m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k} \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$x = x'\langle \vec{i}, \vec{u}_1 \rangle + y'\langle \vec{i}, \vec{u}_2 \rangle + z'\langle \vec{i}, \vec{u}_3 \rangle + m\langle \vec{i}, \vec{i} \rangle$$

$$\Downarrow$$

$$x = a_1x' + a_2y' + a_3z' + m.$$

Fazendo o mesmo produto interno, desta vez com os vetores $\vec{j}$ e $\vec{k}$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= a_1x' + a_2y' + a_3z' + m \\ y &= b_1x' + b_2y' + b_3z' + n \\ z &= c_1x' + c_2y' + c_3z' + p \end{aligned} \tag{15.3}$$

O que conclui a resposta para a pergunta anterior.

Exemplo 15.3.1. Vamos aplicar as equações (15.2) ao ponto O' cujas coordenadas são (m, n, p) no sistema $OXYZ$, o que resulta em

$$\begin{array}{lcl} x' = (m-m)a_1 + (n-n)b_1 + (p-p)c_1 & & x' = 0 \\ y' = (m-m)a_2 + (n-n)b_2 + (p-p)c_2 & \Rightarrow & y' = 0 \\ z' = (m-m)a_3 + (n-n)b_3 + (p-p)c_3 & & z' = 0 \end{array}$$

Mas nós já esperávamos isso, não era? Pois O' é a nova origem no sistema de coordenadas $O'X'Y'Z'$. Já o ponto $(1, 0, 0)$ no sistema $O'X'Y'Z'$, usando desta vez as equações (15.3), tem coordenadas

$$\begin{array}{lcl} x = a_1x' + a_2y' + a_3z' + m & & x = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + m \\ y = b_1x' + b_2y' + b_3z' + n & \Rightarrow & y = b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 + n \\ z = c_1x' + c_2y' + c_3z' + p & & z = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 + p \end{array}$$

resultando em $x' = a_1 + m$, $y' = b_1 + n$ e $z' = c_1 + p$.

Observação 26. Poderíamos ainda pensar na forma matricial de escrevermos (15.2 e 15.3). Considerando $\vec{\mathbf{x}} = (x, y, z)$, $\vec{\mathbf{x}}' = (x', y', z')$ e $\vec{\mathbf{v}} = (m, n, p)$, note que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}_{{}^tM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}$$

Ou ainda $\vec{\mathbf{x}} = M \cdot \vec{\mathbf{x}}' + \vec{\mathbf{v}}$ e $\vec{\mathbf{x}}' = ({}^tM) \cdot \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{v}}$. A matriz M e ${}^tM$ é chamada de **matriz de passagem** do sistema $OXYZ$ para o sistema $O'X'Y'Z'$ e vice-versa.

15.4 As matrizes ortogonais

Do produto $M \cdot^t M$, percebemos que

$$M \cdot^t M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 \\ c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 & c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \vec{u}_1, \vec{u}_1 \rangle & \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle & \langle \vec{u}_1, \vec{u}_3 \rangle \\ \langle \vec{u}_2, \vec{u}_1 \rangle & \langle \vec{u}_2, \vec{u}_2 \rangle & \langle \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle \\ \langle \vec{u}_3, \vec{u}_1 \rangle & \langle \vec{u}_3, \vec{u}_2 \rangle & \langle \vec{u}_3, \vec{u}_3 \rangle \end{pmatrix}$$

Mas como $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ são mutuamente ortogonais, temos

$$M \cdot^t M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que é a *matriz identidade* 3×3 (simbolicamente, $\mathbf{Id}_3$). Desta forma, a matriz de passagem de um sistema de eixos ortogonais para outro tem a propriedade de que sua matriz transposta também é sua inversa.

Definição 15.43. As matrizes quadradas M, tal que ${}^tM \cdot M = M \cdot {}^tM = \mathbf{Id}_3$, são chamadas de **matrizes ortogonais**.

Exemplo 15.4.1. A matriz identidade ($\mathbf{Id}_3$) é ortogonal. Toda matriz na forma

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15.1}$$

para cada $\theta \in \mathbb{R}$, também é uma matriz ortogonal, pois ${}^tR \cdot R = R \cdot^t R = \mathbf{Id}_3$. Em particular, se $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, teríamos

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conheceremos melhor esses tipos de matrizes nas próximas aulas.

Observação 27. Da igualdade ${}^tM \cdot M = \mathbf{Id}_3$ notamos que

$$1 = \det \mathbf{Id}_3 = \det({}^tM \cdot M) = \det({}^tM) \cdot \det M = (\det M)^2,$$

pois $\det({}^tM) = \det M$, e então $(\det M)^2 = 1 \Rightarrow \det M = \pm 1$, ou seja, toda matriz ortogonal M tem que $\det M = \pm 1$.

Definição 15.44. Quando o determinante da matriz de passagem M é igual a $+1$, dizemos que os sistemas $OXYZ$ e $O'X'Y'Z'$ têm a **mesma orientação**. Se o determinante de M for igual a -1, então os sistemas de eixos têm **orientações opostas**.

Exemplo 15.4.2 (Translação de Eixos)**.** No caso em que $\vec{u}_1 = \vec{i}$, $\vec{u}_2 = \vec{j}$ e $\vec{u}_3 = \vec{k}$, ou seja, os eixos OX e $O'X'$, OY e $O'Y'$ além de OZ e $O'Z'$ são paralelos de mesmo sentido. Dizemos então que se trata de uma **translação de eixos**. Em particular, suponhamos que $O' = (-1, 2, 1)$, então as coordenadas no novo sistema $O'X'Y'Z'$ são dadas por

$$x' = x - 1, \;\; y' = y + 2 \;\text{ e }\; z' = z + 1,$$

das quais automaticamente temos

$$x = x' + 1, \;\; y = y' - 2 \;\text{ e }\; z = z' - 1.$$

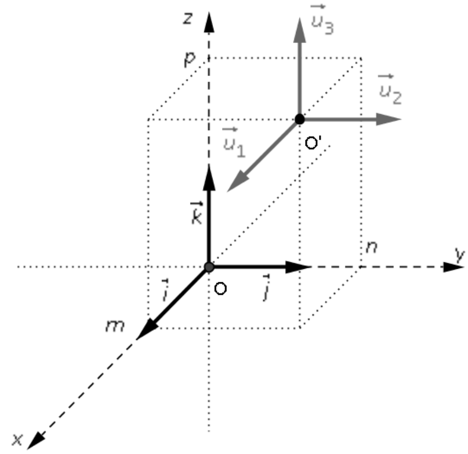

Figura 15.107: $O' = (m, n, p)$ e $\vec{O'P} = \vec{OP} - \vec{OO'}$.

15.5 Resumo

Nesta aula, aprendemos a fazer a mudança de coordenadas tanto rotacionando os eixos e mantendo a origem fixa como também transladando-a. Conhecemos o conjunto das matrizes ortogonais que contém as matrizes de rotação e que serão de grande utilidades na construção de exemplos e aplicações das transformações na disciplina de Álgebra Linear (segundo semestre).

15.6 Atividades

1. Verifique quais das matrizes a seguir são ortogonais ou não:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Qual a condição para o número real α, tal que

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

seja ortogonal?

3. Faça o mesmo que se pede na atividade (2) para as matrizes

$$\text{(a) } R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{(b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

4. Encontre a e b, números reais, tal que os múltiplos aM e bN das matrizes a seguir sejam matrizes ortogonais.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Usando a matriz aM do exercício anterior, efetue a rotação dos eixos (mudança de coordenadas mantendo a origem fixa[3]) . Encontre as novas coordenadas (x', y', z') dos pontos cujas coordenadas (x, y, z) são:

   (a) $(-1, 2, 2)$;

   (b) $(0, 1, 1)$;

   (c) $(-1, 1, -2)$;

   (d) $(1, 1, 1)$.

6. Supondo que as coordenadas dadas no exercício (5) sejam (x', y', z'), quais eram, em cada caso, x, y e z?

[3]Ou seja, as origens do novo e do antigo sistemas coincidem.

7. Ainda com a matriz ortogonal aM da atividade (4), quais são as novas coordenadas x', y' e z' das equações dos planos a seguir?

   (a) $2x + y + 2z = 1$;

   (b) $2x - y = 1$;

   (c) $x + y + z = 0$.

15.7 Comentário das atividades

Conseguiu resolver as atividades 1,2,3 e 4? Então você entendeu o conceito de matrizes ortogonais. Se solucionou as atividades 5,6 e 7, você já tem uma noção de mudança de sistemas de coordenadas.

Caso tenha dificuldades na resolução das atividades, retome com cuidado os conceitos apresentados ao longo da aula. Procurar os tutores para esclarecimentos das dúvidas também é fundamental para o seu aprendizado. Não se esqueça de que o contato com os colegas para discutir os assuntos estudados também é bastante proveitoso.

15.8 Referências

BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear* . São Paulo: Harbra, 1980.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica.* São Paulo: Makron Books,1987.