2
LIVRO

17
AULA

Completando Quadrados

META

Introduzir e exemplificar o método de completamento de quadrados para formas quadráticas com três variáveis.

OBJETIVOS

Ao final desta aula, o aluno deverá identificar uma quádrica central (ou superfície quádrica) utilizando o método de completamento de quadrados.

PRÉ-REQUISITOS

Ter compreendido o conteúdo da aula anterior (Quádricas Centrais).

17.1 Introdução

Olá, caro aluno! Nesta aula iremos conhecer um método (Completamento de quadrados) para que dada uma forma quadrática com três variáveis, possamos associar às quádricas centrais (ou superfícies quádricas) estudadas na **Aula 16**.

Dada a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Fxz + 2Eyz = d, \qquad (17.1)$$

como determinar dentre os tipos descritos na **Aula 16**, qual superfície a equação define?

Antes de apresentarmos o método, precisamos de algumas definições.

Definição 17.50. Uma forma quadrática $\varphi(x, y, z)$ é considerada **positiva** (respectivamente, **negativa**) quando $\varphi(x, y, z) > 0$ (respectivamente, $\varphi(x, y, z) < 0$) para todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Definição 17.51. Se para quaisquer x, y, z tivermos $\varphi(x, y, z) \leq 0$ (respectivamente, $\varphi(x, y, z) \neq 0$), diremos que φ é **não-negativa** (respectivamente, **não-positiva**).

Definição 17.52. Se existirem pontos em $\mathbb{R}^3$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, tal que $\varphi(x_1, y_1, z_1) > 0$ e $\varphi(x_2, y_2, z_2) < 0$, diremos que φ é **indefinida**.

Afirmações

1. Quando a forma quadrática φ é positiva ou negativa, a superfície de nível $\varphi(x, y, z) = d$ é um elipsóide, é vazia ou reduz-se à origem, conforme d tenha o sinal de φ, sinal contrário ao de φ ou seja zero.

2. Quando φ é não-negativa ou não-positiva e existem pontos $P = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, tal que $\varphi(x, y, z) = 0$, então a superfície de nível $\varphi(x, y, z) = d$ é um cilindro de base elíptica, um par de planos paralelos, um único plano, uma reta ou é vazia.

3. E se a forma quadrática φ é indefinida (ou seja, muda de sinal), então a superfície de nível $\varphi(x, y, z) = d$ pode ser um hiperbolóide de uma ou duas folhas, um cone, um cilindro de base hiperbólica ou um par de planos que se cortam segundo uma reta.

Vamos justificar as afirmações com exemplos que demonstraremos posteriormente.

17.2 Completando quadrados

Para completar quadrados na forma

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Fxz + 2Eyz,$$

entre os números A, B e C escolhemos um que não seja nulo. Vamos supor que $A \neq 0$ e façamos desaparecer os produtos xy e xz (caso em que $A = B = C = 0$, analisaremos mais tarde). Escrevemos a soma das parcelas contendo x como

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Dxy + 2Exz &= A\left[x^2 + 2x\left(\frac{D}{A}y + \frac{E}{A}z\right)\right] \\ &= A\left[\left(x + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}z\right)^2 - \left(\frac{D}{A}y + \frac{E}{A}z\right)^2\right] \end{aligned}$$

Completando Quadrados

Tomando $s = x + \left(\frac{D}{A}y + \frac{E}{A}z\right)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y,z) &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\
&= (Ax^2 + 2Dxy + 2Exz) + By^2 + Cz^2 + 2Fyz \\
&= As^2 - A\left(\frac{D}{A}y + \frac{E}{A}z\right)^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz \\
&= As^2 - \left(\frac{D^2}{A}y^2 + \frac{E^2}{A}z^2 + 2\frac{DE}{A}yz\right) + By^2 + Cz^2 + 2Fyz \\
&= As^2 + \left(B - \frac{D^2}{A}\right)y^2 + \left(C - \frac{E^2}{A}\right)z^2 + 2\left(F - \frac{DE}{A}\right)yz \\
&= As^2 + \psi(y,z)
\end{aligned}
$$

recaindo numa forma quadrática com duas variáveis, $\psi(y,z)$, que conhecemos na **Aula 12**.

Observação 28. No caso em que $A = B = C = 0$, ou seja, quando

$$\varphi(x,y,z) = 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,$$

escolhemos entre D, E e F um que não seja nulo, isto é, $D \neq 0$, e fazendo a mudança de variável $x = r + s$, $y = r - s$, notamos que

$$
\begin{aligned}
xy &= r^2 - s^2, \\
xz &= rz + sz \quad \text{e} \\
yz &= rz - sz,
\end{aligned}
$$

e a forma quadrática fica

$$\varphi(x,y,z) = 2Dr^2 - 2Ds^2 + 2Erz + 2Esz + 2Frz - 2Fsz$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x,y,z) = 2Dr^2 - 2Ds^2 + 2(E+F)rz + 2(E-F)sz$$

recaindo no mesmo caso que o anterior.

Depois de completar todos os quadrados, a forma se escreve como

$$\varphi(x,y,z) = \overline{\varphi}(r,s,t) = A'r^2 + B's^2 + C't^2, \qquad (17.1)$$

e assim fica fácil verificar o sinal de φ.

Em relação ao sinal da forma quadrática e seus coeficientes, elas podem ser:

positiva (respectivamente, **negativa**) - quando os coeficientes A', B' e C' são positivos (respectivamente, negativos).

não-negativa (respectivamente, **não-positiva**) - quando os coeficientes A', B' e C' são ≥ 0 (respectivamente, ≤ 0).

indeterminada - quando um dos coeficientes A', B' e C' é positivo e outro é negativo.

Exemplo 17.2.1. Seja $\varphi(x,y,z) = x^2+2y^2+4z^2-xy-2xz-3yz$. Vamos eliminar os produtos xy e xz? Para isso, façamos

$$\begin{aligned} \varphi(x,y,z) &= x^2 - 2x\left(\frac{1}{2}y+z\right) +2y^2+4z^2-3yz \\ &= \left(x-\frac{1}{2}y-z\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y+z\right)^2 +2y^2+4z^2-3yz \end{aligned}$$

Tomando $s = x - \frac{1}{2}y - z$ e substiguindo em $\varphi(x,y,z)$, obtemos

$$\varphi(x,y,z) = s^2 + (2-\frac{1}{4})y^2 + (4-1)z^2 + 2\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)yz$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi(x,y,z) = s^2 + \frac{7}{4}y^2 + 3z^2 - 4yz$$

Repetindo o processso e completando mais um quadrado,

$$\begin{aligned}\varphi &= s^2 + \frac{7}{4}y^2 + 3z^2 - 4yz \\ &= s^2 + 3\left(z^2 - 2z\cdot\frac{2}{3}y + \frac{7}{12}y^2\right)^2 \\ &= s^2 + 3\left[\left(z - \frac{2}{3}y\right)^2 - \frac{4}{9}y^2 + \frac{7}{12}y^2\right]\end{aligned}$$

e desta vez, tomando $t = z - \frac{2}{3}y$, ficamos com

$$\varphi = s^2 + 3\left[t^2 + \frac{5}{36}y^2\right] \quad \Rightarrow \quad \varphi = s^2 + 3t^2 + \frac{5}{12}y^2.$$

E percebemos, automaticamente, que a forma quadrática é positiva, pois A', B' e C' são positivos. Portanto, a forma quadrática $\varphi(x, y, z) = d$, com $d > 0$, define o elipsóide.

Exemplo 17.2.2. Seja $\varphi(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - 4xy - 4yz$, e seguindo o que foi feito no exemplo anterior,

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= 2(x^2 - 2xy) + 3y^2 - 4yz \\ &= 2(x - y)^2 - 2y^2 + 3y^2 - 4yz\end{aligned}$$

Tomando $s = x - y$ e substituindo

$$\varphi = 2s^2 + y^2 - 4yz,$$

executando mais um completamento de quadrados,

$$\varphi = 2s^2 + (y^2 - 4yz) \quad \Rightarrow \quad \varphi = 2s^2 + (y - 2z)^2 - 4z^2,$$

e colocando $t = y - 2z$, temos $\varphi = 2s^2 + t^2 - 4z^2$. Para as superfícies de nível

$$2s^2 + t^2 - 4z^2 = d \quad \text{, ou seja} \quad 2(x - y)^2 + (y - 2z)^2 = d + 4z^2$$

Como estudamos na **Aula 16**, notamos que se:

$d = 0 \ \rightarrow \ 2(x-y)^2 + (y-2z)^2 = 4z^2$ representa um cone;

$d < 0 \ \rightarrow \ 2(x-y)^2+(y-2z)^2-d = 4z^2$ representa uma hipérbole. Além disso, todos os pontos obedecem à condição $4z^2 \geq |d|$, ou seja $|z| \geq \sqrt{|d|}/2$. Deste modo, quando o nível d é negativo, a superfície $\varphi(x,y,z) = d$ não tem pontos entre os planos $z = -\sqrt{|d|}/2$ e $z = \sqrt{|d|}/2$, portanto, é uma hipérbole de duas folhas;

$d > 0 \ \rightarrow \ 2(x-y)^2 + (y-2z)^2 - d = 4z^2$ representa uma hipérbole de uma folha, pois a interseção da superfície com os planos horizontais $z = \mathbf{n}$ é uma curva formada pelos pontos (x, y, n), tal que

$$2x^2 + 3y^2 - 4xy - 4y\mathbf{n} = d. \qquad (17.2)$$

Note que a equação (17.2) depende apenas de x e y. E como aprendemos na **Aula 13** (Equação Geral do Segundo Grau - com duas variáveis), esta curva é uma elipse, pois a translação $x = s+2\mathbf{n}$ e $y = t+2\mathbf{n}$ introduz nesse plano coordenadas s, t, nas quais a equação anterior fica

$$2s^2 + 3t^2 - 4st = d + 4\mathbf{n}^2.$$

E assim, no plano $z = \mathbf{n}$, a curva de nível com $d + 4\mathbf{n}^2 > 0$, da forma quadrática positiva $2s^2 + 3t^2 - 4st$, nos diz que a superfície de nível $\varphi(x,y,z) = d$ corta cada plano horizontal $z = \mathbf{n}$ segundo uma elipse, permitindo-nos concluir que tal superfície é um hiperbolóide de uma folha.

(Veja as figuras (11.1), (11.2) e (11.3).)

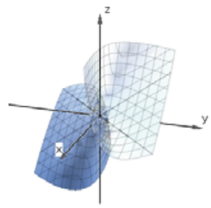

Figura 17.127: $d = 0$.

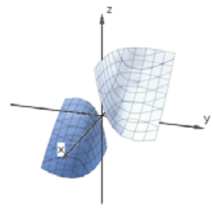

Figura 17.128: $d > 0$.

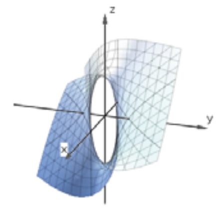

Figura 17.129: $d < 0$.

Exemplo 17.2.3. Seja $\varphi(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2xz - 4yz$. Vamos aplicar o método de completar quadrados,

$$\begin{aligned}
\varphi &= x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \\
&= (x^2 - 2xy - 2xz) + y^2 + 2z^2 + 2yz \\
&= (x - y - z)^2 - (y + z)^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz \\
&= (x - y - z)^2 - y^2 - z^2 - 2yz + y^2 + 2z^2 + 2yz \\
&= s^2 + z^2 \ \text{ com } \ s = x - y - z.
\end{aligned}$$

Verificamos que $\varphi = s^2 + z^2$ é uma forma quadrática não-negativa e a superfície de nível $\varphi(x, y, z) = d$ pode ser:

$d < 0 \ \rightarrow$ vazia;

$d = 0 \ \rightarrow$ é um conjunto de pontos $P = (x, y, z)$, tal que

$$(x - y - z)^2 + z^2 = 0 \quad \text{se } d = 0.$$

Ou seja, $z = 0$ e $x = y$, reduzindo a superfície a uma reta r, formada pelos pontos $(x, x, 0)$ com $x \in \mathbb{R}$ e

$d < 0 \ \rightarrow$ a superfície S corta o plano $y = 0$ segundo a curva

$$(x - z)^2 + z^2 = d \ \Rightarrow \ x^2 - 2xz + 2z^2 = d,$$

que é uma elipse E. E assim, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence à superfície S representada por $(x - y - z)^2 + z^2 = d$ se, e somente se, $P_0 = (x-z, 0, z)$ pertence à elipse E. No entanto, $P = P_0 + \vec{v}$, com $\vec{v} = (y, y, 0)$. Como $(y, y, 0)$ é arbitrário e é um ponto da reta r, concluímos que a superfície S é a reunião das retas paralelas a r, tiradas a partir da elipse E. Ou seja, S é o cilindro (oblíquo) de base E e geratriz r. (Veja a figura (17.130).)

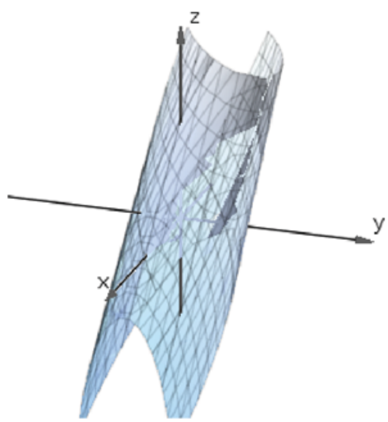

Figura 17.130: Nesta ilustração usamos $d = -5/2$.

Exemplo 17.2.4. Vejamos, agora, $\varphi(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$ e façamos

$$\begin{aligned}
\varphi &= x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz \\
&= (x^2 + 4xy + 2xz) + 3y^2 + z^2 + 4yz \\
&= (x + 2y + z)^2 - (2y + z)^2 + 3y^2 + z^2 + 4yz \\
&= (x + 2y + z)^2 - 4y^2 - z^2 - 4yz + 3y^2 + z^2 + 4yz \\
&= s^2 - y^2 \quad \text{com} \quad s = x + 2y + z.
\end{aligned}$$

Portanto, a forma quadrática φ é indeterminada e sua superfície de nível está representada por

$$s^2 - y^2 = d$$

e para:

$d = 0 \;\rightarrow\;$ $(s+y)(s-y) = 0$ e assim,

$$\begin{array}{lcl} 0 = s + y = x + 3y + z & \multirow{2}{*}{$\Rightarrow$} & \Pi_1 : x + 3y + z = 0 \\ 0 = s - y = x + y + z & & \Pi_2 : x + y + z = 0 \end{array}$$

Os planos Π_1 e Π_2 representam a superfície cuja $\Pi_1 \cap \Pi_2$ é a reta g, dada por $g : (x, 0, -x), x \in \mathbb{R}$.

$d \neq 0 \;\rightarrow\;$ a superfície S, representada por $\varphi(x, y, z) = 0$, corta o plano $z = 0$ segundo a curva $(x + 2y)^2 - y^2 = d \Rightarrow x^2 + 4xy + 3y^2 = d$, que é uma hipérbole H. O ponto $P = (x, y, z) \in S$ se, e somente se, $(x + 2y + z)^2 - y^2 = d$, isto é, se $P_0 = (x + z, y, 0) \in H$. Mas como $P = P_0 + \vec{v}$, com $\vec{v} = (-z, 0, z)$ e o ponto $(-z, 0, z) \in g$, temos que a superfície de nível $\varphi(x, y, z) = d$, $\forall d \neq 0$ é um cilindro (oblíquo) de base H e geratriz g, formado pelas retas paralelas a g, tiradas por pontos H.

Exemplo 17.2.5. Já para $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz$, temos

$$\begin{aligned} \varphi &= x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy - 4xz - 4yz \\ &= (x^2 + 2xy - 4xz) + y^2 - 4z^2 - 4yz \\ &= (x + y - 2z)^2 - (y - 2z)^2 + y^2 + 4z^2 - 4yz \\ &= (x + y - 2z)^2 - y^2 - 4z^2 + 4yz + y^2 + 4z^2 - 4yz \\ &= s^2 \quad \text{com} \quad s = x + y - 2z. \end{aligned}$$

Notamos que para $\varphi(x, y, z) = d$, se:

$d = 0 \;\rightarrow$ é o plano $x + y - 2z = 0$;

$d > 0 \;\rightarrow$ um par de planos paralelos $x + y - 2z = \sqrt{d}$ e $x + y - 2z = -\sqrt{d}$;

$d < 0 \;\rightarrow$ vemos que $s^2 = d \Rightarrow (x + y - 2z)^2 = d$ não tem solução, e assim o conjunto que representa $\varphi = d$ é vazio.

(Veja as figuras (11.5), (11.6) e (11.7).)

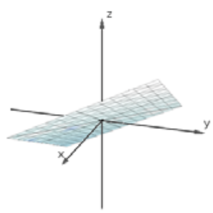

Figura 17.131: $d = 0$.

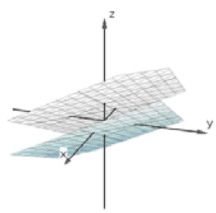

Figura 17.132: $d > 0$.

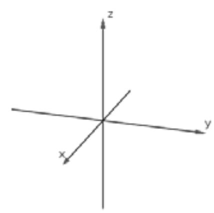

Figura 17.133: $d < 0$.

17.3 Resumo

Nesta aula, você aprendeu que dada uma forma quadrática

$$\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Fxz + 2Eyz = d, \quad \text{com } d \text{ constante},$$

podemos associar a quádricas centrais estudadas na **Aula 16**.

17.4 Atividades

1. Completando os quadrados, identifique as superfícies de nível definidas por cada uma das equações a seguir:

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$;

(b) $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz = 2$;

(c) $y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}yz = 0$;

(d) $-5y^2 + 2xy - 8xz + 2yz = 0$;

(e) $3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz = 1$.

2. Nesta atividade, faça o mesmo procedimento da anterior, porém, para as formas quadráticas que seguem:

(a) $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz$.

(b) $-5y^2 + 2xy - 8xz + 2yz$.

(c) $4x^2 + 3y^2 - z^2 - 12xy + 4xz - 8yz$.

(d) $-x^2 - y^2 - 7z^2 + 16xy + 8xz + 8yz$.

17.5 Comentário das atividades

Se você resolveu a atividade 1, então entendeu como podemos classificar algumas das equações da forma $\varphi(x, y, z) = d$ (com φ uma forma quadrática e d uma constante real fixada). Já na atividade 2, se a resolveu, aprendeu com os exemplos do texto a classificar as possibilidades em que deixamos a equação na forma $\varphi(x, y, z) = d$, com d um número real fixado.

Em caso de dificuldades, retome os conteúdos desta aula e não se esqueça de consultar o tutor desta disciplina. Também é fundamental discutir os conteúdos com os seus colegas de curso.

17.6 Referências

BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear* . São Paulo: Harbra, 1980.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de

Janeiro: IMPA, 2005.

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books,1987.