2
LIVRO

19
AULA

# Transformações Lineares no Espaço

**META**

Identificar e ilustrar algumas transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ (em especial, para $n = m = 3$), bem como as transformações lineares ortogonais e suas propriedades.

**OBJETIVOS**

Ao final desta aula, o aluno deverá identificar e utilizar as transformações de $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$, bem como as transformações lineares ortogonais (quando $n = m = 3$).

**PRÉ-REQUISITOS**

Ter compreendido transformações lineares no plano, mudanças de coordenadas no espaço e quádricas centrais.

## 19.1 Introdução

Olá, nesta aula vamos expandir a definição de transformação linear apresentada na **Aula 14**. Conheceremos alguns exemplos de transformações lineares, como as transformações lineares ortogonais com as propriedades de preservarem o produto interno e os comprimentos das imagens dos vetores pela transformação.

## 19.2 Transformações lineares

Vamos começar com uma definição mais generalizada.

**Definição 19.55.** Sejam $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$ (com $n, m = 1, 2$ ou $3$) dois conjuntos. Uma **transformação linear** é uma função de $V$ em $W$, $F : V \to W$, que satisfaz as seguintes condições:

(i) quaisquer que sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em $V$,

$$F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v}). \tag{19.1}$$

(ii) quaisquer que sejam $\vec{u}$ $V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$F(\lambda\vec{u}) = \lambda F(\vec{u}). \tag{19.2}$$

**Exemplo 19.2.1.** Vejamos alguns exemplos:

1. A transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (com $m = n = 2$),definida por $T(x, y) = (y, 0)$ é uma linear, pois

   (i) Dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, temos que $\vec{u} + \vec{v} =$

$(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e

$$\begin{aligned} T(\vec{u} + \vec{v}) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (y_1 + y_2, 0) \\ &= (0, y_1, 0) + (0, y_2, 0) \\ &= T(\vec{u}) + T(\vec{v}). \end{aligned}$$

(ii) dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $a \in \mathbb{R}$, temos que $a\vec{u} = (ax_1, ay_1)$ e

$$\begin{aligned} T(\vec{u} + \vec{v}) &= T(ax_1, ay_1) \\ &= (ay_1, 0) \\ &= (a(y_1), 0) \\ &= a(y_1, 0) \\ &= aT(\vec{u}). \end{aligned}$$

2. A aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (veja que neste caso, $n = 2$ e $m = 3$), definida por $F(x, y) = (0, x + y, 0)$, é uma transformação linear, pois

(i) dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, temos que $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e

$$\begin{aligned} F(\vec{u} + \vec{v}) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (0, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), 0) \\ &= (0, (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), 0) \\ &= (0, x_1 + y_1, 0) + (0, x_2 + y_2, 0) \\ &= F(\vec{u}) + F(\vec{v}). \end{aligned}$$

(ii) dados $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $a \in \mathbb{R}$, temos que $a\vec{u} = (ax_1, ay_1)$

e

$$\begin{aligned} F(\vec{u}+\vec{v}) &= F(ax_1, ay_1) \\ &= (0, ax_1, ay_1, 0) \\ &= (0, a(x_1+y_1), 0) \\ &= a(0, x_1+y_1, 0) \\ &= aF(\vec{u}). \end{aligned}$$

3. A transformação $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $S(x,y,z) = (xz, yx)$ **não** é linear, pois se fosse, $S(a\vec{u}) = aS(\vec{u})$, para todo $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$. No entanto, se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, temos que

$$\begin{aligned} S(a\vec{u}) &= S(ax_1, ay_1, az_1) \\ &= ((ax_1)(az_1), (ay_1)(az_1)) \\ &= \big(a^2(x_1z_1, a^2(y_1z_1)\big) \\ &= a^2(x_1z_1, y_1z_1) \\ &= a^2S(x_1, y_1, z_1) \\ &= a^2S(\vec{u}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad S(a\vec{u}) \neq aS(\vec{u}).$$

Não obedecendo, assim, à propriedade (ii).

4. Já a transformação $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $Q(x) = 2x + 1$ também **não** é linear. Perceba que

$$\begin{cases} T(x_1) = 2x_1 + 1 \\ T(x_2) = 2x_2 + 1 \end{cases}$$

e para $T(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) + 1$. Vemos que

$$T(x_1)+T(x_2) = (2x_1+1)+(2x_2+1) = 2(x_1+x_2)+2 \neq T(x_1+x_2).$$

Portanto, não obedecendo à propriedade (i).

## 19.3 Transformações lineares em $\mathbb{R}^3$

Agora, vamo-nos concentrar em transformações $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que serão nosso objeto de estudo.

**Definição 19.56.** Uma **transformação linear** $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma correspondência que associa a cada vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$ um vetor $T(\vec{v}) = (x', y', z')$, chamado **imagem**, ou o **transformado** de $\vec{v}$ por $T$, com

$$x' = a_1x + b_1y + c_1z$$
$$y' = a_2x + b_2y + c_2z$$
$$z' = a_3x + b_3y + c_3z.$$

Os coeficientes $a_i, b_i, c_i$ $(i = 1, 2, 3)$ determinam a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

chamada de **matriz da transformação linear** $T$.

Note que sendo $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ vetores da base canônica,

$$T(\vec{i}) = (a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0, a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 + c_2 \cdot 0, a_3 \cdot 1 + b_3 \cdot 0 + c_3 \cdot 0)$$
$$T(\vec{j}) = (a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 + c_1 \cdot 0, a_2 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 + c_2 \cdot 0, a_3 \cdot 0 + b_3 \cdot 1 + c_3 \cdot 0)$$
$$T(\vec{k}) = (a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 1, a_2 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + c_2 \cdot 1, a_3 \cdot 0 + b_3 \cdot 0 + c_3 \cdot 1)$$

$$\Downarrow$$

$$T(\vec{i}) = (a_1, a_2, a_3)$$
$$T(\vec{j}) = (b_1, b_2, b_3)$$
$$T(\vec{k}) = (c_1, c_2, c_3)$$

Ou seja, as colunas de $M$ são os vetores $T(\vec{i}), T(\vec{j}), T(\vec{k})$.

Recorremos à definição de transformação linear no plano dada na **Aula 14** e notamos que para $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ quaisquer, tem-se

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}), \quad T(\lambda\vec{v}) = \lambda T(\vec{v}) \tag{19.1}$$

**Exercício 19.3.1.** Verifique que numa transformação linear valem as igualdades (19.1). (Veja exercício (2).)

A recíproca também é válida, isto é, se uma transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ satisfaz às igualdades (19.1), então $T$ é uma transformação linear. *De fato, sejam $T(\vec{i}) = (a_1, a_2, a_3)$, $T(\vec{j}) = (b_1, b_2, b_3)$ e $T(\vec{k}) = (c_1, c_2, c_3)$. Dado $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem-se $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, e sua imagem por $T$ será*

$$\begin{aligned}
T(\vec{v}) &= T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \\
&= T(x\vec{i}) + T(y\vec{j}) + T(z\vec{k}) \\
&= xT(\vec{i}) + yT(\vec{j}) + zT(\vec{k}) \\
&= x(a_1, a_2, a_3) + y(b_1, b_2, b_3) + z(c_1, c_2, c_3) \\
&= (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z)
\end{aligned}$$

**Definição 19.57.** Considere a transformação $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com matriz

$$N = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}.$$

A soma $T + S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, o produto $\lambda T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (pelo $\lambda \in \mathbb{R}$) e o produto $TS : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das transformações lineares ($T$ e $S$) são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
&(T + S)(\vec{v}) = T(\vec{v}) + S(\vec{v}), \\
&(\lambda T)(\vec{v}) = (\lambda T)(\vec{v}) \quad \text{e} \\
&(TS)(\vec{v}) = T\left(S(\vec{v})\right).
\end{aligned} \tag{19.2}$$

As transformações $T+S$, $\lambda T$ e $TS$ são todas lineares. A verificação das transformações $T+S$ e $\lambda T$ ficam como exercício (veja exercício (3)). *Para a transformação $TS$, a sua matriz da transformação será $MN$. De fato, note que a primeira coluna da matriz $TS$ é*

$$\begin{aligned}(TS)(\vec{i}) &= T\left(S(\vec{i})\right)\\ &= T(p_1, p_2, p_3)\\ &= (a_1p_1 + b_1p_2 + c_1p_3, a_2p_1 + b_2p_2 + c_2p_3,\\ &\quad a_3p_1 + b_3p_2 + c_3p_3)\end{aligned}$$

*que é a primeira coluna da matriz $MN$. Podemos proceder de forma análoga para a segunda e a terceira colunas da matriz de $TS$, pois percebemos que elas coincidem com a matriz $MN$ e, assim, a matriz de $TS$ é $MN$.*

**Exemplo 19.3.1.** Vejamos algumas transformações bem simples de serem observadas.

(a) **[Identidade] Id** : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $\mathbf{Id}(\vec{v}) = \vec{v}$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

(b) **[Transformação Nula]** $\mathcal{O} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, sendo $\mathcal{O}(\vec{v}) = \vec{0}$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Note que em (a), a matriz da transformação é

$$\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Em geral, denotamos as matrizes identidade de ordem $n \times n$ por $\mathbf{I}_n$.

a matriz identidade $3 \times 3$, enquanto que em (b) a matriz de $\mathcal{O}$ é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a matriz nula $3 \times 3$.

(c) **[Homotetia]** A transformação $H = \alpha \cdot \mathbf{Id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ chama-se a homotetia de centro $O = (0,0,0)$ e razão $\alpha$. Veja que $(\alpha \cdot \mathbf{Id})(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Sua matriz é da forma

$$\alpha \cdot \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

**Exemplo 19.3.2.** [Projeção ortogonal sobre uma reta] Seja $r$ uma reta passando pela origem de $\mathbb{R}^3$ e com direção $\vec{u} = (a,b,c)$. Tem-se $r = \{t\vec{u},\ t \in \mathbb{R}\}$, a projeção ortogonal $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre a reta $r$ corresponde a cada vetor $\vec{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ao vetor $P(\vec{v}) \in r$, tal que $\vec{v} - P(\vec{v})$ é ortogonal a $\vec{u}$. Deste modo,

$$P(\vec{v}) = t\vec{u},\ \ t \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \langle u, v - P(\vec{v})\rangle = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, P(\vec{v})\rangle.$$

Tomando $\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = 1$, temos de $P(\vec{v}) = t\vec{u}$,

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle &= \langle \vec{u}, t\vec{u}\rangle \\ &= t\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = t = \langle \vec{u}, P(\vec{v})\rangle$$

E assim, $P(\vec{v}) = t\vec{u} = \langle \vec{u}, P(\vec{v})\rangle \cdot \vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \cdot \vec{u}$. Percebemos ainda que :

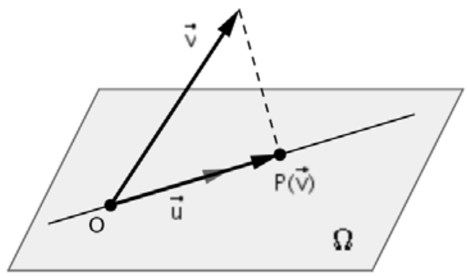


Figura 19.143: $P(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u}$

(i) para quaisquer $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} P(\vec{v}+\vec{w}) &= \langle \vec{u}, \vec{v}+\vec{w} \rangle \cdot \vec{u} \\ &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cdot \vec{u} + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \cdot \vec{u} \\ &= P(\vec{v}) + P(\vec{w}) \end{aligned}$$

(ii) para quaisquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P(\alpha \cdot \vec{v}) &= \langle \vec{u}, \alpha \cdot \vec{v} \rangle \cdot \vec{u} \\ &= \alpha \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \cdot \vec{u} \\ &= \alpha \cdot P(\vec{v}) \end{aligned}$$

Logo, $P$ é linear. Com respeito as suas coordenadas, sabendo que $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (x, y, z)$, temos $P(\vec{v}) = (x', y', z')$, com

$$\begin{cases} x' = a^2x + aby + acz \\ y' = abx + b^2y + bcz \\ z' = acx + bcy + c^2z, \end{cases}$$

a matriz da transformação será dada por

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

O posto de $\mathcal{P}$ é 1, pois seus vetores-coluna são múltiplos de $\vec{u} = (a, b, c)$.

**Exemplo 19.3.3.** [Reflexão em torno de uma reta] Seja $r$ uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e contém o vetor unitário $\vec{u} = (a, b, c)$. A reflexão em torno da reta $r$ é a função $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associando cada $\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao vetor $R(\vec{v})$ tal que $r$ é a mediatriz do segmento de reta que liga $\vec{v}$ a $R(\vec{v})$. Notamos da figura (19.144) que

$$\vec{v} + R(\vec{v}) = 2P(\vec{v})$$

em que $P(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u}$ é a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre a reta $r$. Ou seja, $R = 2P - \mathbf{Id}$ ou, mais explicitamente,

$$R(\vec{v}) = 2\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \vec{u} - \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Portanto, $R$ é uma transformação linear e sua matriz é $N = 2\mathcal{P} - \mathbf{I}_3$, ou seja,

$$N = 2 \cdot \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 - 1 & 2ab & 2ac \\ 2ab & 2b^2 - 1 & 2bc \\ 2ac & 2bc & 2c^2 - 1 \end{pmatrix}$$

### 19.3.1 Transformações ortogonais

**Definição 19.58.** Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ chama-se **ortogonal** quando sua matriz $M$ é ortogonal, isto é, ${}^tM \cdot M = M \cdot ({}^tM) = \mathbf{I}_3$.

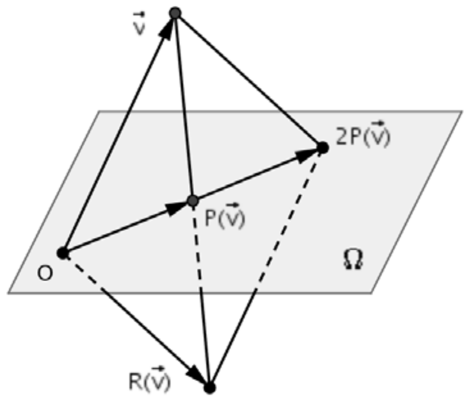


Figura 19.144: $R(\vec{v}) = 2P(\vec{v}) - \vec{v}$

A reflexão do exemplo (19.3.3) é ortogonal. *De fato, a matriz da transformação R, N é simétrica, ou seja,* $N =^t N \Rightarrow N^2 = N \cdot ({}^tN) = \mathbf{I}_3$.

**Exercício 19.3.2.** Verifique que $N^2 = \mathbf{I}_3$.

As rotações em torno de um eixo também são transformações lineares ortogonais.

Todas as rotações ilustradas neste exemplo são no sentido anti-horário, para rotacioná-las no sentido horário, basta trocar $\theta$ por $-\theta$.

**Exemplo 19.3.4.** A rotação de um ângulo $\theta$ em torno do eixo$-z$ é a transformação linear

$$\begin{array}{rccl} T_z : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{v} = (x, y, z) & \mapsto & T_z(\vec{v}) = (x\cos\theta - y\mathrm{sen}\,\theta, x\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta, z). \end{array}$$

cuja matriz é da forma

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que $\mathcal{R}_\theta \cdot ({}^t\mathcal{R}_\theta) =^t \mathcal{R}_\theta \cdot \mathcal{R}_\theta = \mathbf{I}_3$. Temos ainda os caso em que:

1. a rotação é em torno do eixo$-x$, cuja matriz da transformação $T_x$ é dada por

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. a rotação é em torno do eixo$-y$, cuja matriz da transformação $T_y$ é dada por

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Munidos das matrizes de rotação do exemplo anterior, podemos construir algumas superfícies de revolução rotacionando curvas em torno de eixos pré-determinados. Por exemplo, podemos obter um parabolóide (circular) rotacionando a parábola $p(t) = (t, 0, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ em torno do eixo$-z$, fazendo corresponder para cada $\theta$ uma cópia da parábola original rotacionada.

$$\mathcal{R}_\theta \cdot p(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos\theta \\ t\operatorname{sen}\theta \\ t^2 \end{pmatrix}$$

E assim, temos uma outra maneira de parametrizar o mesmo parabolóide (neste caso, com base circular) que estudamos na **Aula 18**.

Podemos obter também a esfera de raio 1, $(S^2)$, rotacionando a curva $(x, \sqrt{1-x^2}, 0)$ em torno do eixo$-x$, como ilustra a figura

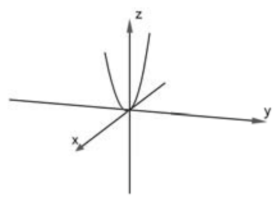


Figura 19.145: Parábola contida no plano $\Pi_{xz}$, dada por $p(t) = (t, 0, t^2),\ t \in \mathbb{R}$.

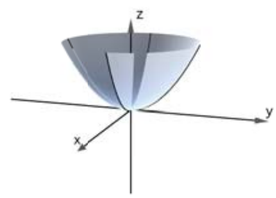


Figura 19.146: Parabolóide gerado pela rotação da parábola $p(t)$ em torno do eixo$-z$.

a seguir. Neste caso, a parametrização será dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1-x^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\left(\sqrt{1-x^2}\right)\operatorname{sen}\theta \\ -\left(\sqrt{1-x^2}\right)\cos\theta \end{pmatrix}$$

Note que

$$\begin{aligned} & x^2 + \left(\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^2 = \\ & = x^2 + (1-x^2)\operatorname{sen}^2\theta + (1-x^2)\cos^2\theta \\ & = x^2 + (1-x^2)(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) \\ & = x^2 + 1 - x^2 \\ & = 1, \end{aligned}$$

confirmando que $\beta(t,\theta) = \left(x, -\sqrt{1-x^2}\operatorname{sen}\theta, -\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)$ obedece à equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ da esfera unitária.

*Proposição* 1. Uma transformação linear ortogonal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preserva o produto interno de vetores, ou seja, $T$ é ortogonal. Então, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, tem-se $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$.

*Demonstração.* Sejam $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$, interpretamos o produto interno $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = ax + by + cz$ com sendo o produto

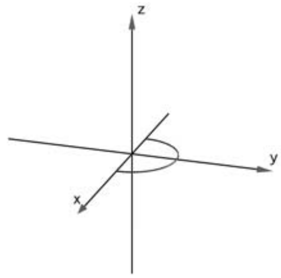


Figura 19.147: Semi-circunferência contida no plano $\Pi_{xy}$, dada por $q(t) = (t, \sqrt{1-t^2}, 0),\ t \in \mathbb{R}$.

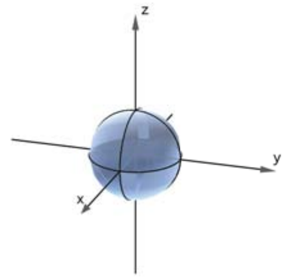


Figura 19.148: Esfera gerada pela rotação da semi-circunferência $q(t)$ em torno do eixo$-x$.

${}^t\vec{u} \cdot \vec{v}$ das matrizes

$$ {}^t\vec{u} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. $$

E se $\mathcal{M}$ é a matriz da transformação linear ortogonal, tem-se por definição${}^t\mathcal{M} \cdot \mathcal{M} = \mathbf{I}_3$, e temos ainda que

$$ \langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle = {}^t(\mathcal{M}\vec{u})\,(\mathcal{M}\vec{v}) = {}^t\vec{u}\,{}^t\mathcal{M}\mathcal{M}\vec{v} = {}^t\vec{u}\ \mathbf{I}_3\ \vec{v} = {}^t\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle $$

□

*Proposição* 2. Se a transformação linear ortogonal preserva o produto interno, também preserva comprimentos.

*Demonstração.* Partindo do produto

$$ \langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, $$

e tomando $\vec{u} = \vec{v}$, obtemos

$$ \langle T(\vec{u}), T(\vec{u}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \ \Rightarrow\ |T(\vec{u})|^2 = |\vec{u}|^2 \ \Rightarrow\ |T(\vec{u})| = |\vec{u}|,\ \ \forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^3. $$

□

**Exemplo 19.3.5.** Usando mais uma vez os exemplos das matrizes de rotação sob os eixos coordenados ($x$, $y$ e $z$) e dados os vetores $\vec{v} = (1,0,1)$ e $\vec{w} = (1,1,-1)$, notamos que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Vamos rotacioná-los em torno do eixo$-y$ em $\theta = \pi/3$ (ou seja, $60^0$). Assim a matriz de rotação é dada por

$$\mathcal{PR}_{\frac{\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & 0 & -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\,\frac{\pi}{3} & 0 & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

logo, $\mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}}\,\vec{v} = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e

$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}}\,\vec{w} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \langle \mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}}\,\vec{v}, \mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}}\,\vec{w} \rangle = 0$, note ainda que

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ e } |\vec{w}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

e que

$$|\mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}}\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \quad \text{e}$$

$$|\mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}}\vec{w}| \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

E assim, percebemos que as imagens dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pela rotação $T_y$ estão de acordo com as afirmações anteriores.

Na próxima aula

Apresentaremos mais alguns exemplos sobre transformações lineares no espaço, como uma aplicação à óptica, na projeção de objetos em 3D para 2D e em codificação de mensagens.

## 19.4 Resumo

Nesta aula, conhecemos uma definição um pouco mais geral que a já conhecida para transformações lineares. Concentrando-nos apenas nas transformações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, foi possível observar que para cada transformação linear existe uma matriz quadrada associada, chamada de matriz da transfomação. Além disso, conhecemos mais alguns exemplos e propriedades como a conservação do produto interno e de comprimentos das imagens de vetores através de transformações lineares ortogonais.

## 19.5 Atividades

1. Verifique se as transformações a seguir são lineares ou não.

   (a) $\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & T(x,y) = (x+y, x-y) \end{array}$

   (b) $\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & F(x,y) = xy+1 \end{array}$

   (c) $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = |x| \end{array}$

   (d) $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

   $$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (e) $\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & F(x,y) = x+y-2z \end{array}$

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear como na definição (19.56), com

   $T(x, y, z) = (a_1x+b_1y+c_1z, a_2x+b_2y+c_2z, a_3x+b_3\mathcal{P}y+c_3z)$.

   Verifique que para $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ quaisquer, valem as igualdades:

   (a) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$;

   (b) $T(\lambda\vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$.

3. Verifique que para as transformações lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, também são lineares as transformações:

   (a) a soma $T + S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $(T + S)(\vec{v}) = T(\vec{v}) + S(\vec{v})$;

   (b) o produto $\lambda T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (pelo $\lambda \in \mathbb{R}$), definida por $(\lambda T)(\vec{v}) = (\lambda T)(\vec{v})$.

4. Use as matrizes de rotação a fim de construir parametrizações para:

   (a) o elipsóide, rotacionando a curva $\beta(t) = (t, 2\sqrt{1 - t^2}, 0), t \in \mathbb{R}$;

   (b) o cone, rotacionando a reta $\gamma(t) = (0, t, t),\ t \in \mathbb{R}$.

5. Use a técnica de demonstração da proposição (1) para demonstrar que se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear ortogonal que preserva comprimentos (ou seja, $|T(\vec{u})| = |\vec{u}|$, $\forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$), então também preserva produto interno (isto é,$\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$, $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$).

6. Mostre que:

(a) a transformação $T_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T_x(\vec{v}) = \mathcal{R}_\alpha \vec{v}$ (rotacionada num ângulo $\alpha$ em torne do eixo$-x$) e $T_y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T_x(\vec{u}) = \mathcal{R}_\theta \vec{u}$ (rotacionada num ângulo $\theta$ em torne do eixo$-y$) , preserva produto interno;

(b) a transformação $(T_y T_x)(\vec{v}) = T_y(T_x(\vec{v})) \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ preserva produto interno.

(c) (generalizando) para quaisquer transformações ortogonais $T, S$, a transformação $ST$ também é ortogonal e preserva produto interno.

## 19.6 Comentário das atividades

Se você conseguiu resolver as atividades 1,3 e 4, então entendeu a definição de transformações lineares. Respondendo às atividades 2, 5 e 6, perceberá que podemos encontrar outras propriedades nos conjuntos das transformações lineares relativas à composição, soma e produto por um escalar e produto interno. Já na questão 7, você deve ter notado que podemos escrever funções (também chamadas de parametrizações) para algumas figuras geométricas já conhecidas nossas (superfícies quádricas).

## 19.7 Referências

BOLDRINI, José Luiz, *Álgebra Linear* . São Paulo: Harbra, 1980.

LIMA, Elon Lages , *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

STEINBRUCH, Alfredo , *Geometria Analítica.* São Paulo: Makron Books,1987.